Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Inverse van $\ln(x)$

1 **maximumscore 3**

- (Bij de functie f_p hoort de vergelijking $y = p \cdot \ln(x)$ dus) bij de inverse functie van f_p hoort de vergelijking $x = p \cdot \ln(y)$ 1
- Dan is $\frac{x}{p} = \ln(y)$, dus $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{p}}$ (en dat is een vergelijking die past bij g_p) 2

of

- (Bij de functie g_p hoort de vergelijking $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{p}}$ dus) bij de inverse functie van g_p hoort de vergelijking $x = \mathrm{e}^{\frac{y}{p}}$ 1
- Dan is $\frac{y}{p} = \ln(x)$, dus $y = p\ln(x)$ (en dat is een vergelijking die past bij f_p) 2

of

- Er moet gelden: $g_p(f_p(x)) = x$ (voor alle x) 1
- $g_p(f_p(x)) = \mathrm{e}^{\frac{p\ln(x)}{p}} = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ (dus g_p is de inverse van f_p) 2

of

- Er moet gelden: $f_p(g_p(x)) = x$ (voor alle x) 1
- $f_p(g_p(x)) = p\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{p}}\right) = p \cdot \frac{x}{p} = x$ (dus f_p is de inverse van g_p) 2

of

- De standaardfuncties f_1 en g_1 zijn elkaars inverse 1
- De grafiek van f_p ontstaat uit de grafiek van f_1 door een vermenigvuldiging met p ten opzichte van de x-as 1
- De grafiek van g_p ontstaat uit de grafiek van g_1 door een vermenigvuldiging met p ten opzichte van de y-as (dus f_p en g_p zijn elkaars inverse) 1

Opmerking
Voor het tweede antwoordelement van het eerste, tweede, derde en vierde antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

2 **maximumscore 5**

- Beschrijven hoe het snijpunt van de grafieken van f_{-1} en g_{-1} (of het snijpunt van een van beide grafieken met de lijn $y = x$) gevonden kan worden 1
- De grafieken van f_{-1} en g_{-1} snijden elkaar voor $x = 0,567...$ 1
- $\int_0^{0,567...} g_{-1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0,567...}^{1} f_{-1}(x)\,\mathrm{d}x$ moet worden berekend 1
- Beschrijven hoe deze integralen kunnen worden berekend 1
- De gevraagde oppervlakte is $(0,432... + 0,111... =) 0,54$ 1

of

- Beschrijven hoe het snijpunt van de grafieken van f_{-1} en g_{-1} (of het snijpunt van een van beide grafieken met de lijn $y = x$) gevonden kan worden 1
- De grafieken van f_{-1} en g_{-1} snijden elkaar voor $x = 0,567...$ 1
- $2 \cdot \int_0^{0,567...} (g_{-1}(x) - x)\,\mathrm{d}x$ moet worden berekend 1
- Beschrijven hoe deze integraal kan worden berekend 1
- De gevraagde oppervlakte is $0,54$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

3 **maximumscore 4**

- $f_p{}'(x)=\frac{p}{x}$ — 1
- Er moet gelden $f_p{}'(x)=1$, en hieruit volgt $p=x$ — 1
- Er moet gelden $f_p(x)=x$, dus $p\ln(p)=p$ — 1
- De oplossing: $p=\mathrm{e}$ ($p=0$ voldoet niet) — 1

of

- $g_p{}'(x)=\frac{1}{p}\mathrm{e}^{\frac{x}{p}}$ — 1
- Er moet gelden $g_p(x)=x$ en $g_p{}'(x)=1$, dus $\mathrm{e}^{\frac{x}{p}}=x$ en $\frac{1}{p}\mathrm{e}^{\frac{x}{p}}=1$ — 1
- Hieruit volgt $p=x$ — 1
- Uit $\mathrm{e}^{\frac{x}{p}}=x$ met $p=x$ volgt: $p=\mathrm{e}$ — 1

Opmerking
Als een kandidaat alleen opmerkt dat moet gelden $f_p(x)=g_p(x)=x$ en $f_p{}'(x)=g_p{}'(x)=1$, voor deze vraag 1 scorepunt toekennen.

Letter op het computerbeeldscherm

4 maximumscore 3

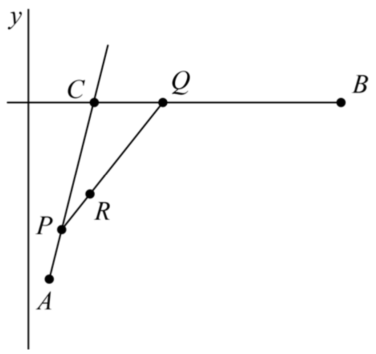
- Een vergelijking van de raaklijn in B is $y = \frac{19}{10}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in A is $y - \frac{4}{3} = 4\left(x - \frac{1}{15}\right)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- $\frac{19}{10} - \frac{4}{3} = 4\left(x - \frac{1}{15}\right)$ oplossen geeft $x = \frac{5}{24}$ 1

5 maximumscore 3

- Het tekenen van punt P met $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 0,25 \cdot \overrightarrow{AC}$ (of P op lijnstuk AC zo dat $AP = 0,25 \cdot AC$) 1
- Het tekenen van punt Q met $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + 0,25 \cdot \overrightarrow{CB}$ (of Q op lijnstuk CB zo dat $CQ = 0,25 \cdot CB$) 1
- Het tekenen van punt R met $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + 0,25 \cdot \overrightarrow{PQ}$ (of R op lijnstuk PQ zo dat $PR = 0,25 \cdot PQ$) 1

of

- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 0,25 \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0,066... \\ 1,333... \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0,141... \\ 0,566... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,102... \\ 1,475 \end{pmatrix}$ en
  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + 0,25 \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0,208... \\ 1,9 \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0,791... \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,406... \\ 1,9 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + 0,25 \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0,102... \\ 1,475 \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0,304... \\ 0,425 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,178... \\ 1,581... \end{pmatrix}$ 1
- Het bepalen van de schaal (bijvoorbeeld met behulp van de afstand van punt B tot de y-as) geeft 6,7:1 en vervolgens het tekenen van punt R 1



Opmerking
Voor elk van de drie punten geldt: een afwijking van maximaal 1 mm is toegestaan. Als P en/of Q niet binnen de marge zijn getekend, maar R wel is getekend, uitgaande van de getekende P en Q, en wél binnen de marge van 1 mm, dan voor R geen scorepunt in mindering brengen.
Als een kandidaat vraag 5 oplost volgens het tweede alternatief en daarvoor een foutieve waarde van de x-coördinaat van C gebruikt (zoals berekend in opgave 4), hiervoor geen punten in mindering brengen.

6 maximumscore 5

Een herleiding

- waarin minimaal twee van de volgende zes formules zijn gebruikt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t\cdot\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\cdot\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ — 1
- waarin minimaal vier van de hierboven genoemde formules zijn gebruikt — 1
- waarin alle zes hierboven genoemde formules zijn gebruikt — 1
- van $\overrightarrow{OR}$ tot een formule zonder haakjes uitgedrukt in t, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$, bijvoorbeeld $\overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{OC} - t\cdot\overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{OC} + t^2\cdot\overrightarrow{OB} - t^2\cdot\overrightarrow{OC} - t\cdot\overrightarrow{OA} - t^2\cdot\overrightarrow{OC} + t^2\cdot\overrightarrow{OA}$ — 1
- van $\overrightarrow{OR}$ tot $\overrightarrow{OR} = (1-t)^2\cdot\overrightarrow{OA} + t^2\cdot\overrightarrow{OB} + 2t(1-t)\cdot\overrightarrow{OC}$ — 1

7 maximumscore 3

- $\overrightarrow{OR} = (1-t)^2\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + 2t(1-t)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}0\\4(1-t)^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2t^2\\2t^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6t(1-t)\\0\end{pmatrix}$ — 1
- Dus $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}2t^2+6t-6t^2\\4-8t+4t^2+2t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4t^2+6t\\6t^2-8t+4\end{pmatrix}$ — 1

of

- $\overrightarrow{OR} = (1-t)^2\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + 2t(1-t)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ — 1
- $x(t) = 2\cdot t^2 + 3\cdot 2t(1-t)$ en $y(t) = 4\cdot(1-t)^2 + 2\cdot t^2$ — 1
- Voor de rest van de herleiding — 1

Gebroken sinusfunctie

8 **maximumscore 8**

- De gemeenschappelijke punten kunnen gevonden worden met de vergelijking $\dfrac{\sin(x)}{\sin(2x)} = \sin(x)$ 1
- ($\sin(x) = \sin(x)\sin(2x)$ geeft) $\sin(x) = 0$ of $\sin(2x) = 1$ 1
- $\sin(2x) = 1$ geeft $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ($\sin(x) = 0$ voldoet niet) 1
- Op het domein geeft dit $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = -\frac{3}{4}\pi$ 1
- $f'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot \sin(2x) - \sin(x) \cdot 2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$ (of een gelijkwaardige vorm) 2
- $g'(x) = \cos(x)$ 1
- $f'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = g'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $f'\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = g'\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus de grafieken van *f* en *g* raken elkaar in twee punten 1

Opmerkingen

– *Voor het vijfde antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*
– *Als een kandidaat alleen opmerkt dat moet gelden $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$, voor deze vraag 1 scorepunt toekennen.*

Raaklijn verschuiven

9 maximumscore 4

- $x^2 - 2x\sqrt{x} + x = 0$ geeft $x = 0$ of $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ — 1
- $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ geeft $\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = 0$ — 1
- Dit geeft $x = 1$ — 1
- De enige twee oplossingen zijn $x = 0$ en $x = 1$ — 1

of

- $x^2 - 2x\sqrt{x} + x = 0$ geeft $x = 0$ of $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ — 1
- $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ geeft $2\sqrt{x} = x + 1$ en dan volgt $x^2 - 2x + 1 = 0$ — 1
- Dit geeft $x = 1$ — 1
- De enige twee oplossingen zijn $x = 0$ en $x = 1$ — 1

10 maximumscore 4

- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_0^1 (x^2 - 2x\sqrt{x} + x)\,dx$ — 1
- Een primitieve van $x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ is $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2$ — 2
- De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{30}$ — 1

Opmerking
Voor het tweede antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores

11 maximumscore 7

- $f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$ — 1
- $f'(0) = 1$ — 1
- Uit $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 1$ volgt $2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right) = 0$ (of $2x = 3\sqrt{x}$) — 1
- Dit geeft ($x = 0$ of) ($\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ dus) $x = \frac{9}{4}$ — 1
- $f(\frac{9}{4}) = \frac{9}{16}$ — 1
- De raaklijn bij $x = \frac{9}{4}$ heeft vergelijking $y = (x - \frac{9}{4}) + \frac{9}{16}$ — 1
- (Dit is gelijk aan $y = x - \frac{27}{16}$, dus) $a = \frac{27}{16}$ — 1

of

- $f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$ — 1
- $f'(0) = 1$ (dus lijn k heeft vergelijking $y = x$) — 1
- Uit $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 1$ volgt $2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right) = 0$ (of $2x = 3\sqrt{x}$) — 1
- Dit geeft ($x = 0$ of) ($\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ dus) $x = \frac{9}{4}$ — 1
- $f(\frac{9}{4}) = \frac{9}{16}$ — 1
- Lijn k verschuiven over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft vergelijking $y = x - a$ — 1
- $\frac{9}{16} = \frac{9}{4} - a$ geeft $a = \frac{27}{16}$ — 1

Vulkaan

12 maximumscore 3

- $t = \dfrac{x}{210\cos(\alpha)}$ 1
- $y = 2000 + 210\sin(\alpha)\cdot\dfrac{x}{210\cos(\alpha)} - 4{,}9\cdot\left(\dfrac{x}{210\cos(\alpha)}\right)^2$ 1
- $\dfrac{4{,}9}{210^2} = \dfrac{1}{9000}$, dus $y = 2000 + \tan(\alpha)\cdot x - \dfrac{1}{9000\cos^2(\alpha)}\cdot x^2$ 1

of

- $x = 210\cos(\alpha)\cdot t$ en $y = 2000 + 210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2$ invullen in formule 2 geeft
  $210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2 = \tan(\alpha)\cdot 210\cos(\alpha)\cdot t - \dfrac{1}{9000\cos^2(\alpha)}\cdot\left(210\cos(\alpha)\cdot t\right)^2$ 1
- Dit geeft $210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2 = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot 210\cos(\alpha)\cdot t - \dfrac{44\,100\cos^2(\alpha)\cdot t^2}{9000\cos^2(\alpha)}$ 1
- Dit geeft $210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2 = 210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2$ dus deze gelijkheid geldt (voor elke waarde van α en t) (en hiermee is formule 2 bewezen) 1

13 maximumscore 3

- De vergelijking $0 = 2000 + \tan(1)\cdot x - \dfrac{1}{9000\cos^2(1)}\cdot x^2$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- De gevraagde afstand is 5100 (meter) (het antwoord –1000 voldoet niet) 1

Als een leerling de afstand tot de top van de vulkaan berekent, en daarvoor gebruik maakt van x=5100 (of nauwkeuriger), dan mogen alle punten al worden toegekend mits het eindantwoord op honderden meters is afgerond.

14 **maximumscore 4**

- Voor een gemeenschappelijk punt moet gelden
$$-\frac{1}{9000}\cdot x^2+4250=-\frac{1+\tan^2(\alpha)}{9000}\cdot x^2+\tan(\alpha)\cdot x+2000$$ 1
- Herleiden tot $\frac{\tan^2(\alpha)}{9000}\cdot x^2-\tan(\alpha)\cdot x+2250=0$ 1
- $D=\left(-\tan(\alpha)\right)^2-4\cdot\frac{\tan^2(\alpha)}{9000}\cdot 2250$ 1
- $D=\tan^2(\alpha)-\tan^2(\alpha)=0$ (voor elke α) (dus heeft elke parabool precies één punt gemeenschappelijk met de gestippelde kromme) 1

of

- Er geldt voor formule 3: $\frac{dy}{dx}=\frac{-1-\tan^2(\alpha)}{4500}\cdot x+\tan(\alpha)$ en voor de formule van de gestippelde kromme: $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{4500}\cdot x$ 1
- Gelijkstellen geeft $x=\frac{4500}{\tan(\alpha)}$ 1
- $x=\frac{4500}{\tan(\alpha)}$ invullen in formule 3 geeft:
$$y=\frac{-1-\tan^2(\alpha)}{9000}\cdot\left(\frac{4500}{\tan(\alpha)}\right)^2+\tan(\alpha)\cdot\frac{4500}{\tan(\alpha)}+2000=-\frac{4500}{2\tan^2(\alpha)}+4250$$ 1
- $x=\frac{4500}{\tan(\alpha)}$ invullen in formule 4 geeft:
$$y=-\frac{1}{9000}\cdot\left(\frac{4500}{\tan(\alpha)}\right)^2+4250=-\frac{4500}{2\tan^2(\alpha)}+4250$$ (en dus is er voor iedere waarde van α een punt waarin de functiewaarden en de afgeleiden aan elkaar gelijk zijn, dus raken de banen in dat punt aan de gestippelde kromme) 1

Opmerking
Als een kandidaat alleen opmerkt dat moet gelden
$$-\frac{1+\tan^2(\alpha)}{9000}\cdot x^2+\tan(\alpha)\cdot x+2000=-\frac{1}{9000}\cdot x^2+4250$$ *en*
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1+\tan^2(\alpha)}{9000}\cdot x^2+\tan(\alpha)\cdot x+2000\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{9000}\cdot x^2+4250\right)$$, *voor deze vraag 1 scorepunt toekennen.*

Scheve asymptoot

15 **maximumscore 8**

- (Als x onbegrensd toeneemt, gaat $\frac{2}{x}$ naar de limietwaarde 0, dus) een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ — 1
- $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ — 1
- Een vergelijking van de raaklijn in P is $y = (1 - \frac{2}{p^2})x + b$ — 1
- Dan geldt (omdat $P(p,\ p + \frac{2}{p})$) $p + \frac{2}{p} = (1 - \frac{2}{p^2})p + b$ — 1
- Dan volgt $b = \frac{4}{p}$ (dus $Q(0, \frac{4}{p})$) — 1
- Voor het snijpunt R geldt $x_R = (1 - \frac{2}{p^2})x_R + \frac{4}{p}$ — 1
- Hieruit volgt $x_R = 2p$ (dus $R(2p, 2p)$) — 1
- $\frac{x_Q + x_R}{2} = \frac{0 + 2p}{2} = p = x_P$ (of $\frac{y_Q + y_R}{2} = \frac{\frac{4}{p} + 2p}{2} = \frac{2}{p} + p = y_P$), dus punt P is het midden van lijnstuk QR — 1

of

- (Als x onbegrensd toeneemt, gaat $\frac{2}{x}$ naar de limietwaarde 0, dus) een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ 1
- $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in P is $y - p - \frac{2}{p} = (1 - \frac{2}{p^2})(x - p)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) (dus $Q(0, \frac{4}{p})$) 2
- Voor het snijpunt met de scheve asymptoot geldt $x = (1 - \frac{2}{p^2})(x - p) + p + \frac{2}{p}$ 1
- Dan volgt $x = x - p - \frac{2}{p^2}x + \frac{2}{p} + p + \frac{2}{p} = x - \frac{2}{p^2}x + \frac{4}{p}$ 1
- Hieruit volgt $x_R = 2p$ (dus $R(2p, 2p)$) 1
- $\frac{x_Q + x_R}{2} = \frac{0 + 2p}{2} = p = x_P$ (of $\frac{y_Q + y_R}{2} = \frac{\frac{4}{p} + 2p}{2} = \frac{2}{p} + p = y_P$), dus punt P is het midden van lijnstuk QR 1

of

- (Als x onbegrensd toeneemt, gaat $\frac{2}{x}$ naar de limietwaarde 0, dus) een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ 1
- $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in P is $y - p - \frac{2}{p} = (1 - \frac{2}{p^2})(x - p)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- Uit $x_Q = 0$ en $x_P = p$ volgt dat moet gelden dat $x_R = 2p$ 1
- $x_Q = 0$ geeft $y_Q - p - \frac{2}{p} = -p + \frac{2}{p}$ ofwel $y_Q = \frac{4}{p}$ 1
- Uit $y_Q = \frac{4}{p}$ en $y_P = p + \frac{2}{p}$ volgt dat moet gelden dat $y_R = 2p$ 1
- $x_R = y_R$, dus punt R ligt op de scheve asymptoot (en daarmee is P het midden van QR) 1

Opmerking
Voor het derde antwoordelement van het tweede en derde antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vlieger

16 maximumscore 5

- $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-a\end{pmatrix}$ is een normaalvector van de middelloodlijn, dus een vergelijking van de middelloodlijn is $x-ay=c$, voor zekere waarde van c 1
- Invullen van $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}a)$ geeft $c=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2$, dus een vergelijking is $x-ay=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2$ 1
- Invullen van $D(-1,0)$ geeft de vergelijking $-1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2$ 1
- Dit geeft (omdat $a>0$) de oplossing $a=\sqrt{3}$ 1

of

- $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $rc_{AB}=-a$ dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn van AB is $\frac{1}{a}$ 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn is: $y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2a}$ 1
- De lijn moet door $D(-1,0)$ gaan, dus er moet gelden $0=-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2a}$ 1
- De oplossing is (omdat $a>0$) $a=\sqrt{3}$ 1

of

- $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-a\end{pmatrix}$ is een normaalvector van de middelloodlijn, dus $\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ is een richtingsvector 1
- $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}a\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van de middelloodlijn 1
- Invullen van $D(-1, 0)$ geeft het stelsel $\begin{cases}-1=\frac{1}{2}+at\\0=\frac{1}{2}a+t\end{cases}$ 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a>0$) dat $a=\sqrt{3}$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB — 1
- $MB^2 = (\frac{1}{2}-1)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}$ en $DM^2 = (\frac{1}{2}--1)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4}$ — 2
- Pythagoras in rechthoekige driehoek BDM geeft $DM^2 + MB^2 = DB^2$, ofwel $\frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} = 4$ — 1
- Hieruit volgt (omdat $a > 0$) $a = \sqrt{3}$ — 1

of

- Als de middelloodlijn van AB door D gaat, dan is driehoek DMB gelijkvormig met driehoek DMA, waarbij M het midden is van lijnstuk AB — 2
- Dus $DA = DB = 2$ — 1
- Pythagoras in driehoek OAD geeft $a^2 + 1^2 = 2^2$ — 1
- Dus (omdat $a > 0$) $a = \sqrt{3}$ — 1

of

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB — 1
- $\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van AB — 1
- $\begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van DM — 1
- $\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2 = 0$ — 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a > 0$) dat $a = \sqrt{3}$ — 1

of

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB — 1
- Hoek BMD is 90° dus M ligt op de cirkel met middellijn DB — 1
- Een vergelijking van de cirkel met middellijn DB is $x^2 + y^2 = 1$ — 1
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ invullen geeft $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 1$ — 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a > 0$) dat $a = \sqrt{3}$ — 1

of

- Voor de punten $P(x, y)$ op de middelloodlijn van AB geldt $\text{d}(P, A) = \text{d}(P, B)$ — 1
- $x^2 + (y - a)^2 = (x-1)^2 + y^2$ — 1
- De middelloodlijn gaat door D, dus $(-1, 0)$ is een oplossing van deze vergelijking — 1
- Substitutie geeft $1 + a^2 = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a > 0$) dat $a = \sqrt{3}$ — 1

Opmerking
Voor het tweede antwoordelement van het vierde antwoordalternatief en het eerste antwoordelement van het vijfde antwoordalternatief mogen 0, 1 of 2 scorepunten worden toegekend.

17 maximumscore 4

- Het totaal van de puntmassa's heeft gewicht $4 + a$ — 1
- Voor het zwaartepunt Z van de vier puntmassa's geldt $\overrightarrow{OZ} = \frac{a}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ — 1
- De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn dus $\left(0, \frac{a}{4+a}\right)$ (of: de tweede coördinaat van Z is $\frac{a}{4+a}$) — 1
- $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{a}{4+a} = \lim\limits_{a \to \infty} \frac{1}{\frac{4}{a} + 1} = 1$ (dus de y-coördinaat van P is 1) — 1

of

- Het totaal van de puntmassa's heeft gewicht $4 + a$ — 1
- (Vanwege symmetrie ligt Z op de y-as, en) voor het zwaartepunt Z van de puntmassa's geldt $y_Z = \frac{1}{4+a}\left(-1 \cdot a + a \cdot 2\right)$ — 1
- Dus $y_Z = \frac{a}{4+a}$ — 1
- $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{a}{4+a} = \lim\limits_{a \to \infty} \frac{1}{\frac{4}{a} + 1} = 1$ (dus de y-coördinaat van P is 1) — 1